# Геометрические соотношения:

U, V, W – перемещения точек срединной плоскости вдоль координат x, y, z

# Физические соотношения

# Функционал полной потенциальной энергии деформации пластины

Так как , W не зависит от z, поэтому можно члены с ним вынести за знак интеграла

Где

Функцию прогиба W будем рассматривать в виде:

g(y) выбираем такой, чтобы она удовлетворяла граничным условиям. Так как рассматривается плита, жестко защемленная по границам, параллельным оси y и со свободными концами в другом направлении, функцию можно принять в виде:

(1)

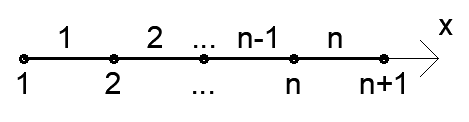
Для нахождения граничных условий возьмем первую вариацию функционала (1):

Используя интегрирование по частям, получим:

Для нахождения минимума функционала, приравняем его нулю. Вариации функции f(x) и её производных равняться нулю не могут, поэтому должны быть равны нулю выражения возле них. Граничные условия получаются при приравнивании нулю членов, не имеющих знак интеграла. Перегруппировав эти члены возле вариаций получим при x=0 и x=a:

(3)

Разобьем область вдоль оси Х на участки. Всего n участков. Нумерация точек начинается с 1, нумерация элементов начинается с 1.



На каждом участке функцию f(x) будем интерполировать полиномом 3 степени.

(4)

Потребуем непрерывности прогибов w(x) и w’(x) в узловых точках, примыкающих к КЭ. Это условие записывается в виде:

Или в развернутом виде:

(5)

Решив эту систему относительно коэффициентов b, подставим получившиеся значения в *(4)*. Тогда функции φ(k) будут выражены через wk. Операцию проводим на каждом конечном элементе.

Чтобы найти wk, найдем минимум функционала *(1)*, взяв производные по wk для каждой внутренней точки. Так как точка, в которой рассматривается wk, принадлежит двум соседним элементам, то производные будут иметь вид (производные на других, не примыкающих элементах, равны 0):

(6)

Производную можно представить в виде:

(7)

Элементов: n

Точек: n + 1

Уравнений (5): (n - 1) \* 2

Неизвестных (перемещения и углы поворотов во внутренних точках): (n + 1) \* 2

Уравнений из граничных условий: 4

# Алгоритм для программы:

1. Для каждого конечного элемента:
   1. Решается система уравнений *(5)* относительно b. Входные данные: система уравнений *(5)*, значения xk+1, xk. Результат: зависимости b от wk+1, w’k+1, wk, w’k.
   2. Значения b подставляются в *(4)*. Входные данные: формула *(4)*, значения b. Результат: зависимость φ(wk+1, w’k+1, wk, w’k, x).
   3. Находятся производные φ’(x), φ’’(x). Входные данные: φ(wk+1, w’k+1, wk, w’k, x). Результат: производные φ’(x), φ’’(x).
   4. Вычисляются производные

Входные данные: функции φ, φ’, φ’’. Результат: значение производных

* 1. Производные и функции подставляются в функции типа *(7)*. Входные данные: функции типа *(7)*, φ, φ’, φ’’. Результат: подынтегральные выражения.
  2. Нахождение интегралов из *(6)* по функциям *(7)*. Входные данные: функции *(7)*. Результат: значения интегралов.
  3. Каждый интеграл из двух берется отдельно и из него получаются коэффициенты к wk-1, w’k-1, wk, w’k и элементы правой части. Заполняется соответствующие участки матрицы. Входные данные: интегралы из (6), значение xk-1, xk, xk+1. Результат: заполненная строка матрицы от одного уравнения.
  4. Суммирование интегралов из *(6)*. Входные данные: интегралы из *(6)*. Результат: сумма интегралов.
  5. Для нахождения коэффициентов возле wk-1, w’k-1, wk, w’k берутся производные по ним. Заполняется матрица коэффициентов.
  6. Для нахождения вектора правой части в функцию из п. g подставляются wk-1=0, w’k-1=0, wk=0, w’k=0.

1. Добавляются 4 уравнения (для x=0 и x=a), получающиеся из граничных условий *(3)*. В точке x=0 существует только . В точке x=a существует только . Поэтому можно переписать:
2. Для сборки общей матрицы коэффициентов и вектора правой части, компоненты матрицы отдельных элементов подставляются на места, соответствующие wk, w’k. В глобальной матрице сначала идут все перемещения, потом углы поворотов.
3. Решается СЛАУ. Получаются значения перемещений и узлов поворотов в узлах.
4. Перемещение в каждом узле пластины определяется выражением:

Где wk – из решения СЛАУ в п.5.

Угол поворота определяется выражением:

Где w’k – из решения СЛАУ в п.5.

1. Строится график «координаты(x,y) – перемещение узла».